Boletín de Estadística e Investigación Operativa
Vol. 31, No. 2, Julio 2015, pp. 118-136

Investigación Operativa

Generalized convexity: Their applications to multiobjective programming

Rafaela Osuna-Gómez and Antonio Rufián-Lizana
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Sevilla
✉ rafaela@us.es, ✉ rufian@us.es

Beatriz Hernández-Jiménez
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e H. Económica
Universidad Pablo de Olavide
✉ mbherjim@upo.es

Gabriel Ruiz-Garzón
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Cadíz
✉ gabriel.ruiz@uca.es

Abstract

The aim of this paper is to show some applicable results to multiobjective optimization problems and the role that the Generalized Convexity plays in them. The study of convexity for sets and functions has special relevance in the search of optimal functions, and in the development of algorithms for solving optimization problems. However, the absence of convexity implies a total loss of effectiveness of the Optimization Theory methods, ie, the results are being verified under less stringent conditions, it was what became known as Generalized convexity. The literature generated around this topic has demonstrated its importance both from a theoretical point of view as practical, but it has also generated an enormous amount of papers with little scientific input.

Keywords: Multiobjective Programming, Optimality Conditions, Duality, Invexity.
AMS Subject classifications: 90C29 , 90C30, 90C46, 52A01.

1. Introducción

La Teoría de Optimización o Programación Matemática está constituida por un conjunto de resultados analíticos y métodos numéricos enfocados a encontrar e identificar al mejor candidato de entre una colección de alternativas, sin tener que enumerar y evaluar explícitamente todas esas alternativas. Un problema de optimización es, en general, un problema de decisión. Se intenta buscar una pauta común, una forma de enfrentarse a un problema que nos permita obtener una serie de modelos que sean aplicables a problemas similares. De forma general, la Optimización es la rama de la Matemática Aplicada que estudia la solución de problemas cuantitativos, es decir, el descubrimiento de los ”mejores valores” numéricos de alguna función objetivo en un dominio definido, incluyendo una variedad de diferentes tipos de funciones objetivo y diferentes tipos de dominios.

El gran avance de la Teoría de Optimización se produce en el momento de la eclosión de la informática, con el aumento de su capacidad de trabajo y de cálculo, puesto que se ha podido tener acceso a la solución y a la modelización de una gran cantidad de problemas que antes no eran abordables. Por lo que se hacía necesario desarrollar resultados teóricos que sirvieran de base a métodos numéricos que permitieran la obtención de resultados satisfactorios.

El estudio de la convexidad de conjuntos y funciones, tiene especial relevancia a la hora de la búsqueda de los óptimos de las funciones, así como en el desarrollo de los algoritmos de resolución de los problemas de optimización, dado que cuando se verifique la convexidad del conjunto de alternativas se pueden desarrollar métodos de resolución eficientes para los problemas de optimización.

Cuando un problema es convexo, el conjunto de soluciones puede caracterizarse en su totalidad: con las condiciones necesarias, en primer lugar, que permiten seleccionar los posibles candidatos a óptimos y con las condiciones suficientes, en segundo término, que descartan los candidatos no óptimos. O bien, con las condiciones derivadas de la dualidad, las condiciones de optimalidad de orden superior y de forma numérica con algoritmos muy eficientes.

Por desgracia, existen problemas en muchas ramas donde la Teoría de la Optimización tiene una aplicación muy extendida, que no verifican las condiciones de convexidad. Sin embargo, la profusa literatura surgida en las décadas de los 80 y 90 demostraba que la ausencia de convexidad no implicaba una pérdida total de eficacia de los métodos de la Teoría de Optimización. Es decir, los resultados seguían verificándose bajo condiciones menos estrictas que la convexidad, fue lo que pasó a denominarse como Convexidad Generalizada. De los esfuerzos realizados por los investigadores para generalizar las propiedades de las funciones derivaron muchas definiciones de funciones, algunas de ellas vacías de contenido o que no eran más que una reescritura de conceptos ya establecidos. Sin embargo, otras definiciones han demostrado su importancia, desde el punto de vista teórico y como marco general para entender la Optimización desde una perspectiva generalista y no como particiones excluyentes. El concepto de invexidad fue primeramente introducido, de forma independiente, en Hanson (1981) y Craven (1981). La importancia de esta clase de funciones radica en que es la menos restrictiva en la que las soluciones de un problema escalar pueden encontrarse a partir de los puntos estacionarios, puntos donde se anula el gradiente de la función, Craven y Glover (1985). A partir de estos trabajos pioneros, muchos otros han demostrado las buenas propiedades de este tipo de funciones, pero también han aparecido muchos otros que presentaban generalizaciones carentes de significado, Zalinescu (2014).

Una de las principales dificultades que presenta la aplicación de las técnicas de programación matemática a la planificación de actividades que requieran toma de decisiones reside en la elección por parte del centro decisor del objetivo que el programa procederá a optimizar (maximizar o minimizar) de forma que la solución encontrada satisfaga una serie de condiciones. El problema no consiste en que resulte difícil al centro decisor encontrar un objetivo, sino que, por el contrario, la tarea de encontrar objetivos resulte demasiado fácil.

La programación matemática clásica es incapaz de dar respuesta a este tipo de planteamientos, pues está concebida para optimizar una función con un único objetivo. Indudablemente el trabajar con funciones de un solo objetivo constituye una importante rigidez a la hora de aplicar la programación a problemas concretos de la vida real, en los que la optimización se realiza o se desearía realizar entre varios objetivos, que muchas veces resultan contradictorios entre sí, que harán que la mejora de uno de ellos dé lugar a un empeoramiento de algún otro. En Charnes y Cooper (1961) se presenta por primera vez un modelo de programación matemática en él que figura de una manera explícita una función con más de un objetivo a optimizar. Básicamente, el modelo propuesto por Charnes y Cooper permite abordar el problema que plantea la programación lineal, cuando entran en conflicto una serie de objetivos incluidos como restricciones. Como en la mayor parte de los casos resulta imposible satisfacer exactamente todos los objetivos, la función objetivo del programa consiste en la minimización de la suma de los valores absolutos de las desviaciones (positivas o negativas) producidas para cada objetivo, con respecto a sus niveles de logro establecidos a priori. A esta nueva técnica se le dio el nombre de programación por objetivos.

Abordar la optimización de varios objetivos simultaneamente, sin recurrir a la reducción que supone transformar el problema en un problema escalar, encuentra un primer escollo: el concepto de óptimo, ahora, es relativo y será necesario decidir de alguna forma cuál (o cuáles) es la mejor solución al problema. El concepto de eficiencia introducido por el economista italiano Vilfredo Pareto en su libro de 1896, en el marco de sus estudios sobre eficiencia económica y distribución de la renta dio lugar al concepto de solución eficiente de Pareto u óptimo de Pareto. Una solución se considera eficiente cuando cualquier mejora en uno de los objetivos conlleva el empeoramiento de algún otro. A partir de aquí han aparecido otras definiciones de soluciones relacionadas: solución débilmente eficiente, propiamente eficiente, etc.

El estudio de la determinación del conjunto de soluciones de un problema con objetivos múltiples se aborda desde diferentes perspectivas: condiciones de optimalidad, dualidad, relaciones con problemas escalares asociados, soluciones aproximadas, etc. En todos los resultados que sustentan dichas estrategias ocupa un lugar destacado la convexidad, o en su defecto la convexidad generalizada.

2. Programación matemática multiobjetivo diferenciable sin restricciones

Consideremos el problema de programación multiobjetivo:

$$\begin{array}{lll} \text{(PM)} & \text{Min} & f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)) \\ & \text{s.a:} & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., p$, X es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y f_j son funciones diferenciables en X.

Al fin y al cabo un problema de optimización es un problema de decisión, donde es preciso establecer analíticamente la estructura de dominancia presente en el centro decisor. Consideremos el orden natural inducido sobre $\mathbb{R}^p$, que dará lugar a los conceptos de solución derivados de la eficiencia de Pareto. Dados $x, y \in \mathbb{R}^p$ notaremos por

- $x < y$ si $x_i < y_i$ para todo $i = 1, ..., p$;
- $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, ..., p$, con al menos una desigualdad estricta;
- $x \leqq y$ si $x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, ..., p$.

El orden anterior define un orden parcial sobre el espacio $\mathbb{R}^p$, lo que implica la no comparabilidad de algunos puntos, que supone una diferencia esencial entre la programación multiobjetivo y la programación escalar clásica.

Definición 2.1. *(Solución débilmente eficiente, Kuhn y Szego (1971)) Un punto factible, $\bar{x}$, se dice que es una solución débilmente eficiente del (PM) si no existe otro punto factible, x, tal que $f(x) < f(\bar{x})$.*

Definición 2.2. *(Solución eficiente, Pareto (1896)) Un punto factible, $\hat{x}$, se dice que es una solución eficiente del (PM) si no existe otro punto factible, x, tal que $f(x) \leq f(\hat{x})$.*

Definición 2.3. *(Solución propiamente eficiente, Kuhn-Tucker (1951)) Un punto factible, x^*, se dice que es una solución propiamente eficiente del (PM) si es* *eficiente y existe una constante M tal que para todo j tal que $f_j(x) < f_j(x^*)$ existe otro i tal que $f_i(x) > f_i(x^*)$ y*

$$\frac{f_j(x^*) - f_j(x)}{f_i(x) - f_i(x^*)} \leq M.$$

Es inmediato que: Propiamente eficiente $\Rightarrow$ Eficiente $\Rightarrow$ Débilmente eficiente.

Las condiciones necesarias de optimalidad permiten indentificar analíticamente a las posibles soluciones.

Teorema 2.1. *(Craven (1977)) Supongamos que f y g son funciones diferenciables en el conjunto abierto $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\bar{x}$ es una solución débilmente eficiente de (PM), entonces $\bar{x}$ es un punto crítico vectorial, i.e., existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \geq 0$, tal que*

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) = 0,$$

donde $\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{M}^{n \times p}$ es la matriz gradiente de la función vectorial f.

Corolario 2.1. *Si $\hat{x}$ es una solución eficiente o propiamente eficiente, entonces $\hat{x}$ es un punto crítico vectorial.*

En Zang, Choo y Avriel (1977) se estudiaron aquellas funciones reales de variable real para las cuales las condiciones necesarias de optimalidad, es decir, aquellas para las que se anulan los vectores gradientes, también son suficientes. Dicho de otra forma, aquellas funciones para las cuales los puntos estacionarios son óptimos globales. Años más tarde, Hanson en 1981, consideró funciones diferenciables para las cuales existia un vector $\eta(x, y)$ tal que

$$f(x) - f(y) \geq \eta(x, y)^T \nabla f(y). \tag{2.1}$$

Claramente las funciones convexas diferenciables verifican (2.1) con $\eta(x, y) = x - y$. Hanson demostró que si la convexidad era sustituida por (2.1), la suficiencia de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y la dualidad débil seguían verificándose. Casi simultáneamente, en Craven (1981) se definió a las funciones que verificaban (2.1) como funciones *invex*. En Craven y Glover (1985), se probó que (2.1) era la condición más débil que debían verificar las funciones para que todos los puntos estacionarios fueran óptimos de la función. Hanson (1981) definió como extensiones de las funciones invex, las funciones *pseudoinvex* y *cuasinvex*, llamadas así después en el libro de Craven (1981) como aquellas que verificaban

$$\eta(x, y)^T \nabla f(y) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(y) \geq 0 \tag{2.2}$$

y

$$f(x) - f(y) \leq 0 \Rightarrow \eta(x, y)^T \nabla f(y) \leq 0 \tag{2.3}$$

respectivamente. Está claro que las anteriores definiciones incluyen a las funciones pseudo-convexas y cuasi-convexas diferenciables. Y de los resultados demostrados en Craven y Glover (1985) resultaba que invex y pseudoinvex eran clases equivalentes cuando f era una función escalar.

La generalización de las condiciones suficientes de optimalidad a la programación multiobjetivo viene dada por la siguiente definición y posterior resultado, recogidas en Osuna et al. (1998).

Definición 2.4. *Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto X. Entonces, la función vectorial f se dice pseudoinvex-I si existe una función $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$*

$$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow \eta(x,y)^T \nabla f(y) < 0.$$

Es inmediato que si $p = 1$ esta definición coincide con (2.2) y con (2.1). Sin embargo, no va a ser cierto que las funciones pseudoinvex sean equivalentes a las invex cuando $p > 1$.

Teorema 2.2. *Todo punto crítico vectorial es débilmente eficiente para el (PM) si y sólo si f es pseudoinvex-I.*

Teniendo en cuenta que el concepto de óptimo para la programación multiobjetivo no es único, como ocurre en el caso escalar, interesa estudiar las condiciones suficientes de optimalidad para otros tipos de soluciones de (PM).

Definición 2.5. *(Arana et al. (2008a)) Sea $f = (f_1, \ldots, f_p) : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto X. Entonces, la función vectorial f se dice pseudoinvex-II si existe una función $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ tal que $\forall x, y \in X$*

$$f(x) - f(y) \leq 0 \Rightarrow \eta(x,y)^T \nabla f(y) < 0.$$

Teorema 2.3. *(Arana et al. (2008a)) Todo punto crítico vectorial es eficiente para el (PM) si y sólo si f es pseudoinvex-II.*

Observación 2.1. *Los teoremas 2.2 y 2.3 son generalizaciones de la caracterización probada en Craven y Glover (1985) para los problemas escalares y pueden esquematizarse en la siguiente figura:*

$$\boxed{f \text{ es Pseudoinvex-I}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\overline{x} \text{ es punto crítico vectorial} \Leftrightarrow \overline{x} \text{ es solución débilmente eficiente}}$$

$$\boxed{f \text{ es Pseudoinvex-II}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\overline{x} \text{ es punto crítico vectorial} \Leftrightarrow \overline{x} \text{ es solución eficiente}}$$

Figura 1: Caracterización de las funciones pseudoinvex-I y II.

Observación 2.2. *Las dos definiciones vectoriales de pseudoinvexidad coinciden con la pseudoinvexidad definida en el caso escalar, que a su vez era equivalente a la invexidad. Esta equivalencia no se tiene en el caso vectorial. Por ejemplo, si consideramos* $f(x) = (x^2, -x^2)$*, se puede comprobar que es pseudoinvex-I (también es pseudoinvex-II), pero no es invex. Y por ejemplo,* $f(x) = (x^2, 5)$ *es pseudoinvex-I y no pseudoinvex-II.*

En consecuencia, las relaciones entre las funciones invex, pseudoinvex-I y pseudoinvex-II para $p > 1$ *se pueden representar en la Figura 2.*

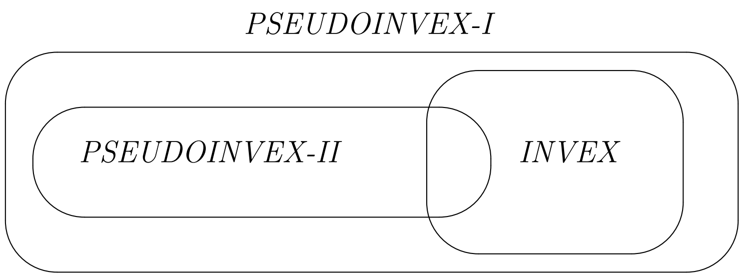

Figura 2: Relaciones entre las funciones invex y pseudoinvex-I y II.

En Maeda (1994) podemos encontrar, que bajo condiciones adecuadas de regularidad del problema, si $\bar{x}$ es una solución eficiente entonces podemos asegurar que los multiplicadores de la función objetivo son estrictamente positivos, es decir, no se anula ninguno (*puntos críticos vectoriales fuertes*). Las hipótesis menos exigentes sobre las funciones que formulan el problema y que permitan asegurar que todos los puntos críticos fuertes son soluciones eficientes o propiamente eficientes es una cuestión abierta.

3. Programación matemática multiobjetivo diferenciable con restricciones

Centrémonos ahora en el problema de optimización con objetivos múltiples cuando el conjunto X está definido mediante desigualdades funcionales, es decir $X = \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0,\ j = 1, ..., m\}$. Comenzaremos suponiendo que las restricciones, al igual que las funciones que definen los objetivos, son funciones diferenciables en el abierto S. En Hanson (1981) se señala que la convexidad del problema implica las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{l} f(x) - f(y) - (x-y)^T \nabla f(y) \geq 0 \\ g_j(x) - g_j(y) - (x-y)^T \nabla g_j(y) \geq 0 \quad j = 1, ..., m \end{array}$$

$$\forall x, y \in S,$$

pero que la *forma funcional del factor* $x - y$ no juega ningún papel a la hora de establecer las siguientes dos importantes propiedades de los problemas convexos:

(A) Todos los puntos de Karush-Kuhn-Tucker son mínimos globales del problema y

(B) no existe *duality gap*.

En Martin (1985) se definió un problema HC-invex cuando existía una función η tal que

$$\begin{array}{l} f(x) - f(y) - \eta(x,y)^T \nabla f(y) \geq 0 \\ g_j(x) - g_j(y) - \eta(x,y)^T \nabla g_j(y) \geq 0 \quad j = 1, ..., m \end{array}$$

$$\forall x, y \in S.$$

La HC-invexidad es suficiente para garantizar que (A) y (B) se verifiquen, aunque como Martin apuntó es una condición excesivamente fuerte, por lo que definió los conceptos de KT-invexidad y WD-invexidad. Considerando esta misma problemática desde el contexto de la programación matemática multiobjetivo, formulemos el problema vectorial con restricciones de desigualdad:

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{(PMR)} & \text{sujeto a:} & g(x) \leqq 0 \\ & & x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{array}$$

donde $f = (f_1, \dots f_p)$, $g = (g_1, \dots, g_m) : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, son funciones diferenciables definidas en el conjunto abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

En el mismo trabajo en que Kuhn y Tucker (1951) presentaron sus condiciones para la optimalidad de un problema escalar, también se presentaban condiciones de *no inferioridad.*

Definición 3.1. *Un punto factible $\bar{x}$ para (PMR) se dice que es un punto crítico vectorial de Karush-Kuhn-Tucker, PCVKT, (o que satisface la condición de eficiencia de Kuhn-Tucker) si existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\lambda^T \nabla f(\bar{x}) + \mu^T \nabla g(\bar{x}) = 0 \tag{3.1}$$

$$\mu^T g(\bar{x}) = 0 \tag{3.2}$$

$$\mu \geqq 0 \tag{3.3}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. *Si $\bar{x}$ es una solución débilmente eficiente para (PMR) y además se verifica una cualificación de restricciones, entonces $\bar{x}$ es un PCVKT.*

Corolario 3.1. *Si $\hat{x}$ es una solución eficiente o propiamente eficiente para (PMR) y además se verifica una cualificación de restricciones, entonces $\hat{x}$ es un PCVKT.*

Como ocurre en la programación escalar, para poder caracterizar todas las soluciones del problema es preciso imponer alguna hipótesis adicional sobre las funciones que definen el modelo.

Definición 3.2. *(Osuna et el. (1999)) El (PMR) se dice KT-pseudoinvex-I si existe una función vectorial $\eta : S \times S \to \mathbb{R}^n$ tal que dados dos puntos factibles x, y se cumple*

$$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \eta(x,y)^T \nabla f(y) < 0 \\ \nabla\eta(x,y)^T g_j(y) \leq 0, \quad \forall j \in I(y) \end{cases}$$

donde $I(y) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(y) = 0\}$.

Teorema 3.2. *(Osuna et el. (1999)) Todo PCVKT es una solución débilmente eficiente para (PMR) si y solo si el (PMR) es KT-pseudoinvex-I.*

El resultado puede probarse para puntos eficientes, pero para ello necesitaremos imponer condiciones de convexidad ligeramente más restrictivas para el problema.

Definición 3.3. *(Arana et al. (2008b) El problema (PMR) se dice KT-pseudoinvex-II si existe una función vectorial $\eta : S\times S \to \mathbb{R}^n$ tal que para cualesqquiera puntos factibles x, y se cumple*

$$f(x) - f(y) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \eta(x,y)^T \nabla f(y) < 0 \\ \eta(x,y)^T \nabla g_j(y) \leq 0, \quad \forall j \in I(y) \end{cases}$$

donde $I(y) = \{j = 1, \ldots, m : g_j(y) = 0\}$.

Con esta definición obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *(Arana et al. (2008b) Cada PCVKT es una solución eficiente del (PMR) si y solo si (PMR) es KT-pseudoinvex-II.*

Observación 3.1. *Los teoremas 3.2 y 3.3 dejan al probado en Martin (1985) para problemas escalares, como caso particular dado que si $p = 1$ los conceptos de eficiencia y eficiencia débil se corresponden con la optimalidad y las desigualdades $f(x) - f(y) < 0$ y $f(x) - f(y) \leq 0$ significan lo mismo.*

Como resumen tenemos el siguiente esquema:

$$\boxed{\text{KT-pseudoinvex-I}} \Longleftrightarrow \boxed{\overline{x} \text{ es PVCKT} \Longleftrightarrow \overline{x} \text{ es solución débilmente eficiente}}$$

$$\boxed{\text{KT-pseudoinvex-II}} \Longleftrightarrow \boxed{\overline{x} \text{ es PVCKT} \Longleftrightarrow \overline{x} \text{ es solución eficiente}}$$

Como resumen de las definiciones anteriores en el caso escalar queda:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{KT-pseudoinvex-I}} & & \\ \Updownarrow & \Longleftrightarrow & \boxed{\text{KT-invex}} \\ \boxed{\text{KT-pseudoinvex-II}} & & \end{array}$$

Estas equivalencias no se verifican en el caso vectorial. Por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P1) Minimizar} & (x^2+1, -x^2+2) \\ \text{sujeto a:} & -3+x \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

es KT-pseudoinvex-II (también KT-pseudoinvex-I) pero no es KT-invex. Y el problema

$$\begin{array}{ll} \text{(P2) Minimizar} & (x^2-3, 10) \\ \text{sujeto a:} & 1+x \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

es KT-pseudoinvex-I y sin embargo no es KT-pseudoinvex-II.

4. Programación matemática multiobjetivo sin diferenciabilidad

Las condiciones de optimalidad establecidas por Kuhn y Tucker son válidas para situaciones que pueden modelarse por problemas de programación matemática donde tanto objetivos como conjunto de alternativas factibles pueden representarse por funciones diferenciables. Sin embargo es evidente que la hipótesis de diferenciabilidad no está presente en todos los posibles problemas de optimización. Por lo anterior es interesante plantearse condiciones de optimalidad aplicables a problemas donde las funciones no sean diferenciables, como se presenta en Clarke (1969).

En el contexto de la programación matemática escalar las relaciones entre los óptimos del problema y los puntos que verifican las condiciones de *punto de silla* se presentan en Mangasarian (1969). Para los problemas con objetivos múltiples ha aparecido mucha literatura sobre los llamados problemas *non-smooth*, aquellos que no eran diferenciables, si bien se les supone que son direccionalmente diferenciables, existe el subdiferencial de Clarke, etc. (a modo de ejemplo, entre otros muchos, Ye (1991), Arana et al. (2010), Slimani et al. (2010), Mishra (2004a) y Mishra (2004b). No son, sin embargo, abundantes los trabajos que abordan el problema en ausencia total de hipótesis de diferenciabilidad. Podemos encontrar trabajos donde prueban condiciones de optimalidad suponiendo pre-invexidad de las funciones, Weir et al. (1988) y algunos otros como Preda (2006) y Gulati et al. (2008).

Definición 4.1. *(Osuna et al. (2001)) Diremos que* $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$ *es un punto de silla vectorial de Kuhn-Tucker para (PMR) si* $\bar{r} \geq 0$, $\bar{v} \geqq 0$ *y las* *siguientes desigualdades se verifican para todo $v \in \mathbb{R}^m$, $v \geqq 0$ y para todo $x \in S$*

$$\bar{r}^T f(\bar{x}) + v^T g(\bar{x}) \leq \bar{r}^T f(\bar{x}) + \bar{v}^T g(\bar{x}) \leq \bar{r}^T f(x) + \bar{v}^T g(x). \tag{4.1}$$

En Osuna et al. (2001) se demuestra que todos los puntos de silla de Kuhn-Tucker vectoriales son soluciones débilmente eficientes sin ningún tipo de requerimiento adicional. Aquí, al contrario que en el caso diferenciable, las condiciones de optimalidad suficientes no precisan de ninguna hipótesis, son las condiciones necesarias, es decir las que seleccionan a los candidatos a solución, las que precisan hipótesis de convexidad. Estas hipótesis pueden ser de tipo de funciones *convexlike* o como demuestran Osuna et al., más generales.

Definición 4.2. *(Yang (1992)) Diremos que $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una función subconvexlike generalizada en S si existe un vector $u \in \mathbb{R}^p$, $u > 0$, tal que para todo $\alpha \in (0,1)$, para cualesquiera $x_1, x_2 \in S$ y para cualquier $\epsilon > 0$, existe $x_3 \in S$ y un escalar $\rho > 0$ que verifican*

$$\epsilon u + \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \leqq \rho f(x_3). \tag{4.2}$$

Esta definición que en principio puede parecer truculenta nos permite garantizar que el conjunto imagen $F(X) + \mathbb{R}^p_+$ sea convexo, ya que es ésta la propiedad geométrica que junto con los teoremas de alternativa establecen las condiciones de optimalidad.

Teorema 4.1. *(Osuna et al.(2001)) Si $(f - f(\bar{x}), g)$ es una función subconvexlike generalizada, el punto $\bar{x}$ es débilmente eficiente para (PMR) y este problema verifica la cualificación de Slater, entonces existen unos vectores $\bar{r}$ y $\bar{v}$ tales que $(\bar{x}, \bar{r}, \bar{v})$ es un punto de silla de Kuhn-Tucker para el problema (PMR).*

Trabajos posteriores han sido publicados sobre las condiciones para obtener la optimalidad de los problemas *non-smooth*, sin embargo no podemos encontrar ninguno que al igual que se ha hecho para la programación diferenciable encuentre las condiciones más débiles exigibles al problema para poder caracterizar completamente al conjunto de soluciones a partir de condiciones de tipo analítico.

5. Relación con problemas escalares

Desde los trabajos pioneros en optimización multiobjetivo se ha considerado que una de las principales técnicas de resolución de los mismos pasaba por encontrar las relaciones con problemas escalares asociados, para los cuales los métodos de resolución tanto desde el punto de vista teórico como computacional están ampliamente desarrollados. Uno de esos problemas escalares asociados es el conocido como *problema ponderado*, que responde al criterio del decisor de combinar todos los objetivos en uno solo mediante una combinación lineal donde a cada objetivo se le asocia una importancia relativa mediante un peso.

$$(\mathrm{P}_w) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & w^T f(x) \\ \text{sujeto a:} & g(x) \leqq 0 \\ & x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \end{array}$$

con $w \in \mathbb{R}^p$, $w \geq 0$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w^T e = 1$.

Geoffrion (1968) estableció el siguiente resultado fundamental.

Teorema 5.1. *Sea $w > 0$ ($w \geq 0$), si $\bar{x}$ es solución de (P_w), entonces $\bar{x}$ es solución propiamente (débilmente) eficiente para (PMR).*

Luego, cualquier solución de un problema ponderado es solución del problema multiobjetivo, sin embargo es evidente que esto no nos permite alcanzar a "todo" el conjunto de soluciones del problema múltiple a partir de la resolución de problemas escalares. Pueden existir soluciones que no sean alcanzables mediante los problemas ponderados, a menos que garantizemos que las funciones objetivo y las restricciones verifican alguna hipótesis adicional. Por supuesto resulta de interés conocer cuál es el conjunto o la clase de funciones más general para las cuales estamos seguros de alcanzar todo el conjunto eficiente (débil o propio) a partir de una resolución sistemática de problemas escalares ponderados.

Este problema está resuelto sólo parcialmente. En Osuna et al. (1999) y Osuna et al. (2001) podemos encontrar los siguientes resultados.

Teorema 5.2. *Todos los puntos débilmente eficientes resuelven algún problema ponderado si cualquier problema ponderado es KT-invex.*

Teorema 5.3. *Si $\bar{x}$ es una solución débilmente (propiamente) eficiente, la función vectorial $(f - f(\bar{x}), g)$ es subconvexlike generalizada y se verifica la cualificación de Slater, entonces $\bar{x}$ resuelve un problema ponderado (con vector de pesos estrictamente positivos).*

Es decir, la conclusión es que podemos garantizar alcanzar todas las soluciones débilmente eficientes a partir de una resolución sistemática de problemas escalares si cualquier combinación lineal positiva de los objetivos es invex (o pseudoinvex porque sería una función escalar).

Sería también interesante plantearse un resultado análogo para las soluciones eficientes y propiamente eficientes, para las cuales se produce una situación un tanto enigmática (al menos no resuelta en la literatura). Si el vector de pesos es estrictamente positivo, todas las soluciones de los problemas ponderados no nos permiten alcanzar las soluciones eficientes, sino las propiamente eficientes (es decir un subconjunto de las eficientes). Y si el vector de pesos tiene alguna componente nula, sólo puedo asegurar que la solución es débilmente eficiente, no eficiente. Queda por tanto como cuestión abierta la relación entre el conjunto de soluciones eficientes y las soluciones de los problemas en los que se optimiza una combinación lineal ponderada de los objetivos.

Otra forma clásica de escalarización de un problema multiobjetivo es mediante los conocidos como problemas ϵ-restringidos, que responden a la situación en la que el decisor establece unos niveles a cumplir para todos los objetivos, excepto para uno, el cual quiere que sea lo más satisfactorio posible.

$$\begin{array}{lll} (P_k(\epsilon)) & \text{Min} & f_k(x) \\ & \text{s.a:} & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \\ & & f_j(x) \leq \epsilon_j \\ & & \forall\, j = 1, 2, ...p. \end{array}$$

Para evitar los problemas de infactibilidad se suele usar como $\epsilon_j = f_j(\bar{x})$ con $j \neq k$ y $\bar{x} \in X$. A estos problemas se les denota por $P_k(\bar{x})$.

Las relaciones entre las soluciones del problema multiobjetivo y las soluciones de $P_k(\bar{x})$ se recogen en los siguientes teoremas.

Teorema 5.4. *(Chankong et al. (1983)) $\hat{x} \in X$ resuelve $P_k(\hat{x})$ para todo $k \Leftrightarrow$ $\hat{x}$ es eficiente. Y si $\hat{x} \in X$ resuelve $P_k(\bar{x})$ para algún k y la solución es única, entonces $\hat{x}$ es eficiente.*

Teorema 5.5. *(Chankong et al. (1983)) Si $\bar{x} \in X$ resuelve $P_k(\bar{x})$ para algún k entonces $\bar{x}$ es débilmente eficiente.*

Para garantizar el recíproco del teorema anterior se precisa alguna hipótesis adicional sobre la función f.

Definición 5.1. *Diremos que f es explícitamente cuasiconvexa si se verifica que para cualquier par $x, y \in X$ se satisfacen:*

- $f_j(z) \leq max\{f_j(x), f_j(y)\}$, *con* $z \in [x, y]$,
- *si* $f_j(x) \neq f_j(y)$, $f_j(z) < max\{f_j(x), f_j(y)\}$, *con* $z \in (x, y)$

para todo $j = 1, ..., p$.

Teorema 5.6. *(Ruiz et al. (1995)) Si f es explícitamente cuasiconvexa, entonces $\bar{x}$ es débilmente eficiente $\Leftrightarrow$ $\bar{x} \in X$ resuelve $P_k(\bar{x})$ para algún k.*

Además, la definición 5.1 mantiene para los problemas multiobjetivos una de las propiedades más interesantes de las funciones convexas, la garantía de que bajo convexidad las soluciones locales son globales.

Teorema 5.7. *(Ruiz et al. (1995)) Sea f una función explícitamente cuasiconvexa. Entonces si $\bar{x} \in X$ es localmente eficiente, entonces es globalmente eficiente.*

6. Dualidad

Todo problema de programación matemática admite un problema dual que lo caracteriza, y de tal forma que, resuelto éste, se puede resolver aquél. En muchos casos se da la circunstancia de que el problema dual es más sencillo de resolver que el primal (es decir, que el problema inicialmente planteado). Un uso habitual de la dualidad, también, es proporcionar cotas para los valores óptimos de la función objetivo cuando se usan aproximaciones. El problema dual nos permitirá también analizar los cambios en los valores óptimos cuando se modifica la parte derecha de las restricciones. Es lo que se conoce como el *análisis de sensibilidad*.

Considerados dos problemas (A) y (B) diremos que (B) puede ser llamado dual de (A) si se verifican las siguientes dos condiciones:

1. *Dualidad débil:* los valores objetivo de (A) son mayores o iguales que los de (B) para cualesquiera puntos factibles de (A) y (B), respectivamente.

2. *Dualidad fuerte e inversa:* Si (A) alcanza un óptimo en algún punto, entonces (B) alcanza un óptimo en otro punto y los valores objetivo óptimos coinciden y viceversa.

Consideremos el problema de optimización multiobjetivo con restricciones (PMR) donde las restricciones y los objetivos son funciones diferenciables en S. Seguiremos notando por X el conjunto factible de este problema primal como

$$X = \{x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ tal que } g(x) \leqq 0\}.$$

Los diferentes intentos de generalizar la teoría de la dualidad para poder aplicarla a los problemas multiobjetivos han dado lugar a una amplia literatura, donde se proponen distintos problemas duales para (PMR). Podemos citar desde los pioneros trabajos de Rosinger (1978), Tanino et al. (1979) y Luc (1984), entre otros, a trabajos más actuales como Ahmad (2005), Gulati et al. (2007), Antczak (2009) y Gao (2014), por mencionar algunos.

Definición 6.1. *Llamaremos dual de Wolfe multiobjetivo asociado a (PMR) al problema formulado como:*

$$\begin{array}{lll} (D_W) & Max & f(y) + \mu^T g(y)e, \\ & s.a: & \lambda^T \nabla f(y) + \mu^T \nabla g(y) = 0, \\ & & \mu \geqq 0, \\ & & \lambda \geq 0, \quad \lambda^T e = 1, \\ & & y \in S. \end{array}$$

Definición 6.2. *Llamaremos dual de Mond-Weir multiobjetivo asociado a (PMR) al problema formulado como:*

$$\begin{array}{lll} (D_{MW}) & Max & f(y), \\ & s.a: & \lambda^T \nabla f(y) + \mu^T \nabla g(y) = 0, \\ & & \mu^T g(y) \geq 0, \\ & & \mu \geqq 0, \\ & & \lambda \geq 0, \quad \lambda^T e = 1, \\ & & y \in S. \end{array}$$

Denotamos por U_W y por U_{MW} los conjuntos factibles para el dual de Wolfe y de Mond-Weir respectivamente.

Teorema 6.1. *(Dualidad Débil) (Osuna (1996)) Sean $x \in X, (y, \lambda, \mu) \in U_W$, supongamos que f y g son invex sobre S respecto al mismo η. Entonces*

$$f(x) \not< f(y) + \mu^T g(y)e.$$

Teorema 6.2. *(Dualidad Fuerte) (Osuna (1996)) Sea $\bar{x}$ una solución débilmente eficiente (propiamente eficiente) para (PMR) y supongamos que una cualificación de restricciones es satisfecha. Si f y g son invex respecto al mismo vector η, entonces existe $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es solución débilmente eficiente (propiamente eficiente) para (DW) y $\bar{\mu}^T g(\bar{x}) = 0$.*

Teorema 6.3. *(Dualidad Inversa) (Osuna (1996)) Sean f y g invex respecto a la misma función η y supongamos que f y g son dos veces diferenciables. Sea $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una solución débilmente eficiente para (DW). Si la matriz Hessiana $\nabla^2 \bar{\lambda}^T f(\bar{y}) + \nabla^2 \bar{\mu}^T g(\bar{y})$ es definida positiva o negativa, entonces $\bar{y}$ es solución débilmente eficiente para (PMR).*

Para el problema dual multiobjetivo tipo Mond-Weir se han probado también los correspondientes teoremas de dualidad bajo distintas hipótesis de convexidad generalizada.

Teorema 6.4. *(Dualidad Débil) (Osuna (1996)) Sean $x \in X, (y, \lambda, \mu) \in U_{MW}$, supongamos que f y g son invex sobre X respecto al mismo η. Entonces*

$$f(x) \not< f(y).$$

Teorema 6.5. *(Dualidad Fuerte) (Osuna (1996)) Sea $\bar{x}$ una solución débilmente eficiente para (PMR) y supongamos que una cualificación de restricciones es satisfecha. Si f y g son invex respecto al mismo vector η, entonces existe $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ tal que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ es solución débilmente eficiente para (DMW).*

Teorema 6.6. *(Dualidad Inversa) (Osuna (1996)) Sean f y g invex respecto a la misma función η y supongamos que f y g son dos veces diferenciables. Sea $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ una solución eficiente para (DMW). Si la matriz Hessiana $\nabla^2 \bar{\lambda}^T f(\bar{y}) + \nabla^2 \bar{\mu}^T g(\bar{y})$ es definida positiva o negativa y los vectores $\{\nabla f_i(\bar{u}) : i = 1, ..., p\}$ son linealmente independientes, entonces $\bar{y}$ es solución eficiente para (PMR).*

Referencias

[1] Ahmad, I. (2005). Sufficiency and duality in multiobjective programming with generalized (F, ρ)-convexity. *J. Appl. Anal.*, **11**, 19-33.

[2] Antczak, T. (2009). On G-invex multiobjective programming. Part II. Duality. *J. Global Optim.*, **43**, 111-140.

[3] Arana, M. Rufián, A., Osuna, R. Ruíz, G. (2008a). A characterization of pseudoinvexity in multiobjectiveprogramming. *Math. Comput. Modelling*, **48**, 1719-1723.

[4] Arana, M. Rufián, A., Osuna, R. Ruíz, G. (2008b) Pseudoinvexity, optimality conditions and efficiency in multiobjective problems; duality. *Nonlinear Anal.*, **68**, 24-34.

[5] Arana, M., Ruiz, G., Rufián, A., Hernández, B. (2010). A characterization of pseudoinvexity for the efficiency in non-differentiable multiobjective problems. Duality. *Nonlinear Anal.*, **73**, 1109-1117.

[6] Chankong, V. Haimes, Y.Y. (1983). *Multiobjective decision making:theory and methodology*. North-Holland. Amsterdam.

[7] Charnes, A., Cooper, W.W. (1961). *Management models and industrial applications of linear programming. Vol. II.* John Wiley and Sons, Inc., New York-London.

[8] Clarke, F.H. (1969). *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York.

[9] Craven B.D. (1977) Lagrangian Conditions and Quasiduality. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **16**, 325-339.

[10] Craven, B.D. (1981). Invex Functions and Constrained local minima. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **24**, 357-366.

[11] Craven, B.D. (1981). *Duality for generalized convex fractional programs. Generalized concavity in optimization and economics*, (eds. S. Schaible and W.T.Ziemba), Academic Press, New York, 473-489.

[12] Craven, B.D., Glover, B.M. (1985). Invex functions and duality. *Austral. Math. Soc. Ser. A*, **39**, 1-20.

[13] Gao, X. (2014). General Mond-Weir Type Second Order Dual in Multiobjective Programming. *J. Interdiscipl. Math.*, **17**, 365-384.

[14] Geoffrion, A.M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization, *J. Math. Anal. Appl.*, **22**, 618-630.

[15] Gulati, T. R., Agarwal, D. (2008). Optimality and duality in nondifferentiable multiobjective mathematical programming involving higher order (F,α,ρ,d)-type I functions. *J. Appl. Math. Comput.*, **27**, 345-364.

[16] Gulati, T.R., Ahmad, I., Agarwal, D. (2007). Sufficiency and duality in multiobjective programming under generalized type-I functions. *J. Optim. Theory Appl.*, **135**, 411-427.

[17] Hanson, M.A. (1981). On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **80**, 545-550.

[18] Kuhn, H.W., Szego, G.P. Editors, (1971). *Differential Games and Related Topics*, American Elsevier Publishing Company, New York, New York.

[19] Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (1951). *Nonlinear Programming in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistic and Probability*, edited by J. Neyman, University of California Press, Berkeley Calif..

[20] Luc, D.T. (1984). On duality theory in multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, **43**, 557-582.

[21] Maeda, T. (1994). Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: differentiable case. *J. Optim. Theory Appl.*, **80**, 483-500.

[22] Mangasarian, O.L. (1969). *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York.

[23] Martin, D.H. (1985). The essence of invexity. *J. Optim. Theory App.*, **47**, 65-76.

[24] Mishra, S.K., Wang, S.Y., Lai, K.K. (2004a). Optimality and duality in nondifferentiable and multiobjective programming. *J. Glob. Optim.*, **29**, 425-438.

[25] Mishra, S.K., Wang, S.Y., Lai, K.K. (2004b) Nondifferentiable multiobjective programming under generalized d-invexity. *Eur. J. Oper. Res.*, **160**, 218-226.

[26] Osuna, R. (1996). *Programación con Objetivos Múltiples: Dualidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

[27] Osuna, R., Beato, A., Rufián, A. (1999). Generalized convexity in multiobjective programming. *J. Math. Anal. Appl.*, **233**, 205-220.

[28] Osuna, R., Rufián, A., Ruiz, P. (1998). Invex functions and generalized convexity in multiobjective programming, *J. Optim. Theory Appl.*, **98**, 651-661.

[29] Osuna, R., Rufián, A., Ruíz, P. (2001). Duality in nondifferentiable vector programming. *J. Math. Anal. Appl.*, **259**, 462-475.

[30] Pareto, V. (1896). *Cours d'economie politique.* Rouge. Lausanne.

[31] Preda, V. (2006). Optimality conditions for a nondifferentiable multiobjective problem. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **51**, 485-496.

[32] Rosinger, E.E. (1978). Multiobjective duality whithout convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, **66**, 442-450.

[33] Ruiz, P., Rufián, A. (1995). A characterization of weakly efficient points. *Mathematical Programming*, **68**, 205-212.

[34] Slimani, H., Radjef, M.S.(2010). Nondifferentiable multiobjective programming under generalized d-invexity. *Eur. J. Oper. Res.*, **202**, 32-41.

[35] Tanino, T. Sawaragi, Y. (1979). Duality theory in multiobjective programming. *J. Optim. Theory Appl.*, **27**, 509-529.

[36] Weir, T., Mond, B. (1988). Pre-invex functions in multiple objective optimization, *J. Math.Anal. Appl.*, **136**, 29-38.

[37] Yang, X. (1992). Alternative theorems and optimality conditions and weakened convexity, *Opsearch*, **29**, 125-135.

[38] Ye, Y.L. (1991). d-invexity and optimality conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **162**, 242-249.

[39] Zalinescu, C. (2014). A critical view on invexity. *J. Optim. Theory Appl.* **162**, 695-704.

[40] Zang, I., Choo, E.U., Avriel, M. (1977). On functions whose stationary points are global. *J. Optim. Theory Appl.*, **22**, 195-208.

Acerca de los autores

Rafaela Osuna Gómez es Profesora Titular de Universidad adscrita al Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Sevilla. Es licenciada y Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Sus trabajos de investigación se engloban en el campo de la programación matemática, centrándose en los problemas con objetivos múltiples, los problemas variacionales y los problemas de control, desarrollando aspectos tales como la no regularidad de los problemas y el papel jugado por las condiciones de convexidad.

Antonio Rufián Lizana es profesor Titular de la Universidad de Sevilla en el departamento de Estadística e I. O. Sus principales líneas de investigación están relacionadas con problemas de optimización y sus condiciones de optimalidad, tanto en problemas clásicos como en entornos difusos.

Beatriz Hernández Jiménez es Profesora Contratada Doctora en la Universidad Pablo de Olavide de Sevilla, adscrita a la Escuela Politécnica Superior. Es Licenciada en Matemáticas y en Ciencias Técnicas Estadísticas por la Universidad de Sevilla y doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Sus líneas principales de investigación son la programación matemática, el estudio de la convexidad generalizada y los problemas no regulares.

Gabriel Ruiz Garzón es Profesor Titular de Universidad en la Universidad de Cádiz en la Facultad de Ciencias Sociales y de la Comunicación del Campus de Jerez de la Frontera. Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada y doctor por la Universidad de Sevilla. Sus líneas principales de investigación son la programación matemática, el estudio de la convexidad generalizada y la Historia de la Estadística y la Probabilidad.